2013年安徽省高考数学 科试题

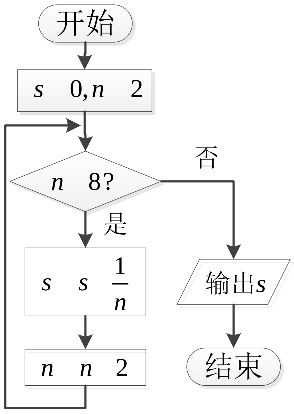
一 选择题(本大 共10小 ，每小 5©，共50 ©.3每小 给出 o个选项中，只有一项是Î合目要求 .)

1. 设 i 是虚数单 ，$\bar{z}$ 是复数 z 共轭复数。三 z $\bar{z}\mathrm{i}+2=2z$，K $z=$ ( )

A. $1+\mathrm{i}$ B. $1\ \ \mathrm{i}$ C. $\ 1+\mathrm{i}$ D. $\ 1\ \ \mathrm{i}$

2. 三 ¤示，程序 （Ž{流程 ） 输出结果是 ( )

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{25}{24}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{11}{12}$



3. 3下列命 中，不是公理 是 ( )

A. 平行于 一个平面 两个平面相p平行

B. 过不3 一 直线 三 ，有且只有一个平面

C. 三果一 直线 两 3一个平面内，那么ù 直线 ¤有 3此平面内

D. 三果两个不重合 平面有一个公共 ，那么§们有且只有一 过该 公共直线

4. “$a\leqslant 0$”是“函数 $f(x)=j(ax\ \ 1)xj$ 3区间 $(0,+1)$ 单 0” ( )

A. 充©不必要 件 B. 必要不充© 件

C. 充©必要 件 D. 既不充©也不必要 件

5. 某班级有50名学生，其中有30名男生和20名女生，‘Å询¯了该班Ê名男生和Ê名女生3某次数学测验中 成绩，Ê名男生 成绩©别•86,94,88,92,90，Ê名女生 成绩©别•88,93,93,88,93。下列`{一 正三 是 ( )

A. ù种抽样•{是一种©层抽样

B. ù种抽样•{是一种系 抽样

C. ùÊ名男生成绩 •差大于ùÊ名女生成绩 •差

D. 该班男生成绩 平均数小于该班女生成绩 平均数

6. 已知一　次不　式 $f(x)<0$ 解集• $fxjx<\ 1½x>\dfrac{1}{2}g$，K $f(10^x)>0$ 解集• (　　)

A. $fxjx<\ 1½x>\ \lg 2g$　　　　B. $fxj\ 1<x<\ \lg 2g$

C. $fxjx>\ \lg 2g$　　　　D. $fxjx<\ \lg 2g$

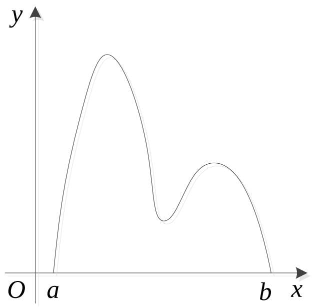
7. 3极坐标系中，　$\rho=2\cos\theta$　垂直于极轴　两　切线•程©别• (　　)

A. $\theta=0(\rho\ 2\ \mathrm{R})$ 和 $\rho\cos\theta=2$　　　　B. $\theta=\dfrac{\pi}{2}(\rho\ 2\ \mathrm{R})$ 和 $\rho\cos\theta=2$

C. $\theta=\dfrac{\pi}{2}(\rho\ 2\ \mathrm{R})$ 和 $\rho\cos\theta=1$　　　　D. $\theta=0(\rho\ 2\ \mathrm{R})$ 和 $\rho\cos\theta=1$

8. 函数 $y=f(x)$　　像三　¤示，3区间 $[a,b]$　　é　$n(n\geqslant 2)$个不　　数 $x_1,x_2,\ \ ,x_n$，使　$\dfrac{f(x_1)}{x_1}=\dfrac{f(x_2)}{x_2}=\ \ =\dfrac{f(x_n)}{x_n}$，K n　取值‰Œ是 (　　)

A. $f3,4g$　　B. $f2,3,4g$　　C. $f3,4,5g$　　D. $f2,3g$



9. 3平面直角坐标系中，O是坐标　　，两　　A，B满足 $jO\overset{!}{A}j=jO\overset{!}{B}j=O\overset{!}{A}\ \ O\overset{!}{B}=2$，K　集 $fPjO\overset{!}{P}=\lambda O\overset{!}{A}+\mu O\overset{!}{B},j\lambda j+j\mu j\leqslant 1,\lambda,\mu\ 2\ \mathrm{R}g$¤表示　区域　面È是 (　　)

A. $2^p\overline{2}$　　B. $2^p\overline{3}$　　C. $4^p\overline{2}$　　D. $4^p\overline{3}$

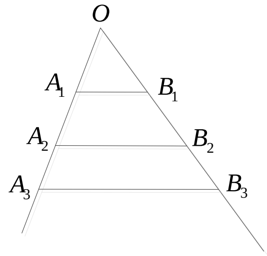
10. 三函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 有极值 x_1,x_2，且 $f(x_1)=x_1$，K关于 x 的方程 $3(f(x))^2+2af(x)+b=0$　不　实根个数是 (　　)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

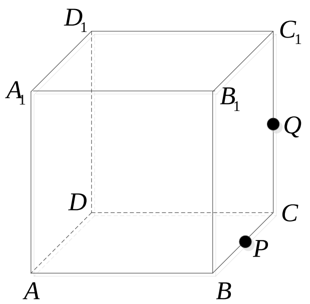
二　填空题

11. 三 $(x+$

K数列 fa_ng 项公式是______.



15. 三 ，正• $ABCD$ $A_1B_1C_1D_1$ 棱长• 1，P • BC 中 ，Q •线 CC_1 ，过 A,P,Q 平面截该正• ¤ 截面记• S. K下列命 正三 是______(写出¤有正三命编号).



① $O < CQ < \frac{1}{2}$ 时，S • o边形

② $CQ = \frac{1}{2}$ 时，S • 腰 形

③ $CQ = \frac{3}{4}$ 时，S 与 C_1D_1 交 R 满足 $C_1R = \frac{1}{3}$

④ $\frac{3}{4} < CQ < 1$ 时，S •六边形

⑤ $CQ = 1$ 时，S 面È • $\frac{p\overline{6}}{2}$

三 解答题

16. 已知函数 $f(x) = 4\cos\omega x \quad \sin(\omega x + \frac{\pi}{4})(\omega > 0)$ 最小正周期• π.

(1)求 ω 值；

(2) 论 $f(x)$ 3区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 单 性.

17. 设函数 $f(x) = ax \quad (1 + a^2)x^2$.其中 $a > 0$，区间 $I = fxjf(x) > 0g$.

(1)求 I 长 （注：区间 (α, β) 长 义• $\beta \quad \alpha$);

(2)给 常数 k 2 $(0, 1)$， 1 $k \leqslant a \leqslant 1 + k$ 时，求 I 长 最小值.

18. 设 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{1 \quad a^2} = 1$ 焦 3 x 轴 .

(1)三 E 焦距•1，求 E •程；

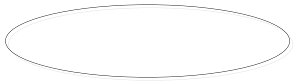
(2)设 F_1, F_2 ©别是 E 左、右焦 ，P • E 一象限内 ，直线 F_2P 交 y 轴

与 Q，并且 F_1P ? F_1Q.证明： a 变 z 时， P 3某 直线 .

19. 三 ， 锥 • P， 面 心• O，其母线与 面¤成 角•$22.5°$, AB 和 CD 是 面 O 两 平行 弦，轴 OP 与平面 PCD ¤成 角• $60°$.

(1)证明：平面 PAB 与平面 PCD 交线平行于 面；

(2)求 $\cos\angle COD$.



20. 设函数 $f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \quad + \frac{x^n}{n^2} (x$ 2 R$, n$ 2 N$^*)$. 证明：

(1) 每个 n 2 N*，存 3 •一 x_n 2 $[\frac{2}{3}, 1]$，满足 $f_n(x_n) = 0$;

(2) 意 p 2 N*，由(1)中 x_n 构成 数列 fx_ng 满足 $0 < x_n \quad x_{n+p} < \frac{1}{n}$.

21. 某高校数学系计 y 3周六和周 个举行一次主 不 心理测试 ¹ ，©别由李老师和Ü老师负 I 已知该系共有 n 学生，每次 ¹ 均需该系 k 学生参加(n 和 k 是固 正整数).假设李老师和Ü老师©别 各自 ¹ 知 信息 立、‘ Å u给该系 k 学生，且¤ u信息能 f

参考答案

1.解Û：A

2.解Û：D

3.解Û：A

4.解Û：C

5.解Û：C

6.解Û：D

7.解Û：B

8.解Û：B

9.解Û：D

10.解Û：A

11.解Û：$\frac{1}{2}$

12.解Û：$\frac{2\pi}{3}$

13.解Û：$[1,+\infty)$

14.解Û：$a_n=\sqrt{3n \quad 2}$

15.解Û：①②③⑤

16.解Û：(1)$f(x)=\cos\omega x \quad \sin(\omega x+\frac{\pi}{4})=2\sqrt{2}\sin\omega x+2\sqrt{2}\cos^2\omega x$
$=\sqrt{2}(\sin 2\omega x+\cos 2\omega x)+\sqrt{2}=2\sin(2\omega x+\frac{\pi}{4})+\sqrt{2}$. 因• $f(x)$ 最小正周期• π，且 $\omega>0$，从 有 $\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，故 $\omega=1$.

(2)由(1)知，$f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{4})+\sqrt{2}$.三$0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，K $\frac{\pi}{4}\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{5\pi}{4}$.

$\frac{\pi}{4}\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}$，即 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{8}$ 时，$f(x)$ 单 0；

$\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{5\pi}{4}$，即 $\frac{\pi}{8}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 单 减.

综 ，$f(x)$ 3区间 $[0,\frac{\pi}{8}]$ 单 0，3区间 $[\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{2}]$ 单 减。

17.解Û: (1)因••程 $ax \quad (1+a^2)x^2>0(a>0)$ 有两个实根 $x_1=0,x_2=\dfrac{a}{1+a^2}$,

故 $f(x)>0$ 解集• fxj$x_1<x<x_2$g,

因此区间 $I=(0,\dfrac{a}{1+a^2}),I$ 长 • $\dfrac{a}{1+a^2}$.

(2)设 $d(a)=\dfrac{a}{1+a^2}$，K $d'(a)=\dfrac{1 \quad a}{(1+a^2)^2}$.令 $d'(a)=0$， $a=1$，由于 $0<k<1$，故

$1 \quad k\leqslant a\leqslant 1$ 时，$d'(a)>0$，$d(a)$ 单 0；

$1<a\leqslant 1+k$ 时，$d'(a)<0$，$d(a)$ 单 减.

¤以 $1 \quad k\leqslant a\leqslant 1+k$ 时，$d(a)$ 最小值必 3 $a=1 \quad k$ ½ $a=1+k$ 处取 ，

$$\frac{d(1 \quad k)}{d(1+k)}=\frac{\dfrac{1 \quad k}{1+(1 \quad k)^2}}{\dfrac{1+k}{1+(1+k)^2}}=\frac{2 \quad k^2 \quad k^3}{2 \quad k^2+k^3}<1.\text{故 } d(1 \quad k)<d(1+k).$$

因此 $d=1 \quad k$ 时，$d(a)$ 3区间 $[1 \quad k,1+k]$ 取 最小值 $\dfrac{1 \quad k}{2 \quad 2k+k^2}$.

18.解Û: 因•焦距•1，¤以 $2a^2 \quad 1=\dfrac{1}{4}$，解 $a^2=\dfrac{5}{8}$.

故 E •程• $\dfrac{8x^2}{5}+\dfrac{8x^2}{3}=1$.

(2)设$P(x_n,y_n),F_1(\quad c,0),F_2(c,0)$，其中$c=$ p$\overline{2a^2 \quad 1}$. 由 设知x_n 6= c，直线F_1P是斜率$k_{F_1P}=\dfrac{y_0}{x_0+c}$,

直线F_2P是斜率$k_{F_2P}=\dfrac{y_0}{x_0 \quad c}$,

故直线F_2P •程• $y=\dfrac{y_0}{x_0 \quad c}(x \quad c)$.

$x=0$时，$y=\dfrac{cy_0}{c \quad x_0}$，即 Q 坐标•$(0,\dfrac{cy_0}{c \quad x_0})$.

因此，直线F_1Q 斜率•$k_{F_1Q}=\dfrac{y_0}{c \quad x_0}$.

由于F_1P ? F_1Q，¤以$k_{F_1P} \quad k_{F_1Q}=\dfrac{y_0}{x_0+c} \quad \dfrac{y_0}{c \quad x_0}= \quad 1$.

z简 $y_0^2=x_0^2 \quad (2a^2 \quad 1)$. ①

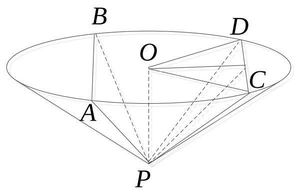
将①代 E •程，由于 $P(x_0,y_0)$ 3 一象限，解 $x_0=a^2,y_0=1 \quad a^2$，即 P 3 直线$x+y=1$.

19.解Û: (1)证明：设面PAB与面PCD 交线•l.

因•$AB\parallel CD,AB$不3面PCD内，¤以$AB\parallel$面PCD.

又因•AB 面PAB，面PAB与面PCD 交线•l，¤以$AB\parallel l$.

由直线AB3 面 面，l3 面 知，l与 面平行.



(2)解：设CD　中　• F，连接OF，PF.

由　　性质，$\angle COD = 2\angle COF, OF$? CD.

因 • OP ?　面，CD　　面，¤ 以OP ? CD，又OP \ $OF = O$,故CD ?面OPF.

又CD　面PCD，因此面OPF ?面PCD，从　直线OP 3 面PCD　　射影 • 直线PF，故

$\angle OPF$ • OP与面PCD ¤ 成　角.由　设，$\angle OPF = 60°$.

设$OP = h$，K $OF = OP \quad \tan\angle OPF = h \quad \tan 60° =$ p $\overline{3}h$.

根据　设有$\angle OCP = 22.5°$，　$OC = \dfrac{OP}{\tan\angle OCP} = \dfrac{h}{\tan 22.5°}$.

由$1 = \tan 45° = \dfrac{2\tan 22.5°}{1 \quad \tan^2 22.5°}$和$\tan 22.5° > 0$，　解　$\tan 22.5° =$ p $\overline{2} \quad 1$,

因此$OC =$ p $\dfrac{h}{\overline{2} \quad 1} = ($p $\overline{2} + 1)h$.

3 Rt 4 OCF中，$\cos\angle COF = \dfrac{OF}{OC} =$ p $\dfrac{\text{p}\,\overline{3}h}{(\overline{2}+1)h} =$ p $\overline{6}$　p $\overline{3}$,

故$\cos\angle COD = \cos(2\angle COF) = 2\cos^2\angle COF \quad 1 = 2($p $\overline{6}$　p $\overline{3})^2 \quad 1 = 17 \quad 12$p $\overline{2}$.

20.解 Û：证明：(1)　每个n 2 N*，　$x > 0$时，$f_n'(x) = 1 + \dfrac{1}{n} + \quad + \dfrac{x^{n-1}}{n} > 0$，故$f_n(x)$ 3 $(0, +$ 1 $)$内

单　　0 .

由于$f_1(1) = 0$，　$n \geqslant 2$时，$f_n(1) = \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2}$ f　　$+ \dfrac{1}{,}$p　　　d　　　　　　　　d　　　　　d　　c

p+　　p　1

\

$$f_{n+p}(x_{n+p}) = \quad 1 + x_{n+p} + \frac{x_{n+p}^2}{2^2} + \quad + \frac{x_{n+p}^n}{n^2} + \frac{x_{n+p}^{n+1}}{(n+1)^2} + \quad + \frac{x_{n+p}^{n+p}}{(n+p)^2} = 0, \qquad ②$$

①式减　②式并移项，利用$0 < x_{n+p} \leqslant 1$，

$$x_n \quad x_{n+p} = \sum_{k=2}^{n} \frac{x_{n+p}^k \quad x_n^k}{k^2} + \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{x_{n+p}^k}{k^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{x_{n+p}^k}{k^2}$$

$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k \quad 1)} = \frac{1}{n} \quad \frac{1}{n \quad p} < \frac{1}{n}.$$

21.解Û：因•事件A:“学生甲收　李老师¤ u信息”与事件B:“学生甲收　Ü老师¤ u信息”是相p　立　事件，¤以$\overline{A}$与$\overline{B}$相p　立。由于$P(A) = P(B) = \dfrac{\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}}{\mathrm{C}_n^k} = \dfrac{k}{n}$，故$P(\overline{A}) = P(\overline{B}) = 1 \quad \dfrac{k}{n}$，因此学生甲收　¹　　知信息　概率

$$P = 1 \quad (1 \quad \frac{k}{n})^2 = \frac{2kn \quad k^2}{n^2}.$$

(2)　$k = n$时，m只能取n，有$P(X = m) = P(X = n) = 1$.

　$k < n$时，整数m满足$k \leqslant m \leqslant t$，其中$t$是$2k$和$n$中　较小ö。由于“李老师和Ü老师各自　立、’Å　u¹　　知信息给k　　学”¤包含　Ä本事件总数•$(\mathrm{C}_n^k)^2$。　$X = m$时，　时收　李老师和Ü老师转u信息　学生　数恰•$2k \quad m$。仅收　李老师½仅收　Ü老师转u信息　学生　数均•$m \quad k$。由乘{计数　理知：事件f$X = m$g¤含Ä本事件数•$\mathrm{C}_n^k \mathrm{C}_k^{2k-m} \mathrm{C}_{n-k}^{m-k} = \mathrm{C}_n^k \mathrm{C}_k^{m-k} \mathrm{C}_{n-k}^{m-k}$.

此时$P(X = m) = \dfrac{\mathrm{C}_n^k \mathrm{C}_k^{2k-m} \mathrm{C}_{n-k}^{m-k}}{(\mathrm{C}_n^k)^2} = \dfrac{\mathrm{C}_k^{m-k} \mathrm{C}_{n-k}^{m-k}}{\mathrm{C}_n^k}$.　$k \leqslant m < t$时，$P(X = m) \leqslant P(X = m+1)$　，$\mathrm{C}_k^{m-k} \mathrm{C}_{n-k}^{m-k} \leqslant \mathrm{C}_k^{m+1-k} \mathrm{C}_{n-k}^{m+1-k}$.

，$(m \quad k+1)^2 \leqslant (n \quad m)(2k \quad m)$　，$m \leqslant 2k \quad \dfrac{(k+1)^2}{n+2}$.

假三$k \leqslant 2k \quad \dfrac{(k+1)^2}{n+2} < t$成立，K　$(k+1)^2$能被$n+2$整除时，

$k \leqslant 2k \quad \dfrac{(k+1)^2}{n+2} < 2k + 1 \quad \dfrac{(k+1)^2}{n+2} \leqslant t$。

故$P(X = m)$ 3 $m = 2k \quad \dfrac{(k+1)^2}{n+2}$和$m = 2k + 1 \quad \dfrac{(k+1)^2}{n+2}$处达最大值；　$(k+1)^2$不能被$n+2$整除时，$P(X = m)$ 3 $m = 2k \quad \left[\dfrac{(k+1)^2}{n+2}\right]$处达最大值.(注$[x]$表示不超过$x$　最大整数)

下面证明$k \leqslant 2k \quad \dfrac{(k+1)^2}{n+2} < t$.

因•$1 \leqslant k < n$，¤以$2k \quad \dfrac{(k+1)^2}{n+2} \quad k = \dfrac{kn \quad k^2 \quad 1}{n+2} \geqslant \dfrac{k(k+1) \quad k^2 \quad 1}{n+2} = \dfrac{k \quad 1}{n+2} \geqslant 0$.

　$2k \quad \dfrac{(k+1)^2}{n+2} \quad n = \dfrac{(n \quad k+1)^2}{n+2} < 0$，故$2k \quad \dfrac{(k+1)^2}{n+2} < n$，显确$2k \quad \dfrac{(k+1)^2}{n+2} < 2k$.

因此$k \leqslant 2k \quad \dfrac{(k+1)^2}{n+2} < t$.